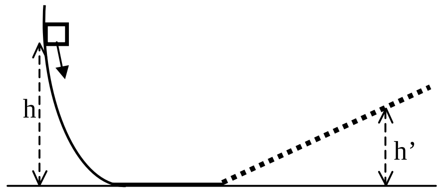
Problemi e approfondimenti su: Lavoro ed Energia

Problemi 1,2,3,4: difficoltà media, utili per la preparazione all'esame
Problemi 5,6: di approfondimento, facoltativi

1) Un bambino trascina con velocità costante una slitta di massa 5.6 Kg sulla neve, tirandola con una fune per un tragitto di 12 m in piano. Se il coefficiente di attrito dinamico tra la slitta e la neve è $\mu_d = 0.08$, e la fune forma un angolo di 35^0 rispetto all'orizzontale, quanto vale il lavoro meccanico fatto?

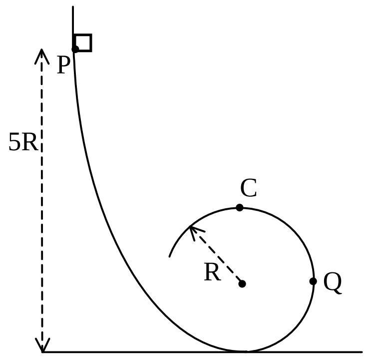
2) Un blocco di massa 2.7 Kg scende dall'altezza h = 1.8 m lungo una guida liscia che termina con un piano inclinato di $\theta = 18^0$ rispetto all'orizzontale; il piano è scabro con coefficiente d'attrito dinamico $\mu_d = 0.2$. A quale altezza h' arriverà il blocco?



3) Una pietra di 7.9 Kg è appoggiata su una lunga molla verticale, che viene compressa di 13.2 cm rispetto alla posizione di equilibrio.
   a) Qual è la costante elastica della molla, e quale sarebbe la frequenza delle oscillazioni proprie del sistema?
   b) La pietra viene spinta verso il basso di altri 25 cm. Quanta Energia potenziale viene immagazzinata nella molla?
   c) La pietra viene lasciata andare. Qual è la sua velocità nel momento in cui si suppone che la molla sia ritornata nella posizione di equilibrio?
   d) Fino a quale altezza risale la pietra, rispetto alla posizione iniziale?

4) Un'automobile di massa 1200 Kg si muove alla velocità costante di 54 Km/h e il suo motore fornisce una potenza di 16 kW.
   a) Quanto vale la forza media ritardante associata ai vari tipi di attrito?
   b) Quale potenza dovrebbe sviluppare il motore della macchina per viaggiare alla stessa velocità lungo una strada in salita con una pendenza dell'8%?
   c) Lungo quale pendenza può scendere la macchina in folle, mantenendo la stessa velocità?

5) Un carrello di massa 1.2 Kg scivola lungo la guida in figura, partendo dal punto P. La guida è liscia e senza attrito, e il raggio della parte circolare vale R = 2.8 m.
   a) Qual è la velocità nel punto Q e quanto vale la forza normale F_N in quel punto?
   b) Da quale altezza deve essere lasciato cadere il carrello perché perda contatto con la guida nel punto C, il punto più alto della parte circolare?



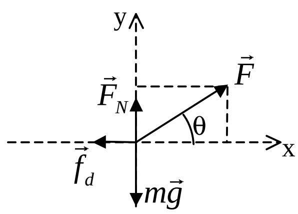
6) Tra gli atomi della molecola del cloruro di sodio NaCl vi è un legame di tipo ionico, che può essere descritto da un'Energia potenziale funzione della distanza x tra gli atomi nella forma:

$$U(x) = -\frac{k}{x} + \frac{b}{x^9} \;;$$

Trovare i valori dei parametri efficaci k e b sapendo che la distanza di legame è 0.25 nm e l'Energia di dissociazione della molecola negli ioni costituenti vale 5.1 eV.

Soluzioni dei problemi su Lavoro ed Energia

1) Il disegno mostra il diagramma delle Forze in gioco: la forza di trascinamento è F, mentre la forza di attrito dinamico, che si oppone al moto verso destra sull'asse X, è $f_d = \mu_d F_N$ dove F_N è la forza normale all'appoggio. La forza normale non è uguale al peso mg perché una parte del peso della slitta viene sostenuta dalla componente sull'asse Y della forza di trascinamento F. Possiamo ricavare il valore di F dalla seconda legge della dinamica, sugli assi X e Y, tenendo conto del fatto che la slitta viaggia a velocità costante e quindi ad accelerazione nulla:



(asse x) $\quad F\cos\theta - f_d = 0\,; \quad f_d = \mu_d F_N \quad \Rightarrow \quad F_N = \dfrac{F\cos\theta}{\mu_d}$

(asse y) $\quad F\,\mathrm{sen}\,\theta + F_N - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad F\left(sen\,\theta + \dfrac{\cos\theta}{\mu_d}\right) = mg$

dove si è ricavato F_N dalla prima e sostituito nella seconda. Risulta quindi:

$$F = \frac{mg\mu_d}{\mu_d\,\mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta} = \frac{5.6\mathrm{Kg}\cdot 9.8\mathrm{m/s}^2\cdot 0.08}{0.08\cdot \mathrm{sen}(35^0) + \cos(35^0)} = 5.08\,\mathrm{N}$$

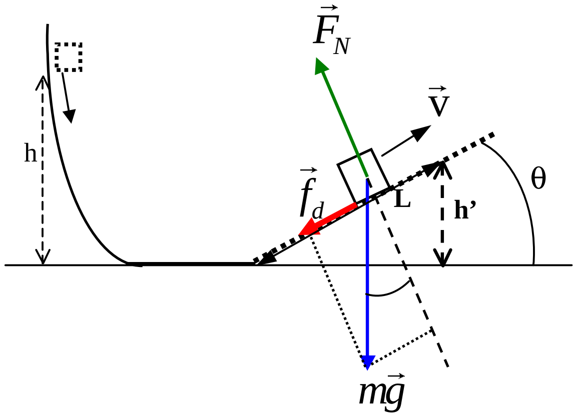
Il lavoro meccanico si calcola dalla formula base:

$$W = \int_i^f F\cos\theta\, ds$$

tenendo conto che sia F sia cosθ sono costanti, per cui l'integrale sullo spostamento ds risulta la lunghezza totale percorsa:

$$W = F\cos\theta\int_i^f ds = F\cos\theta\, L = 5.08\mathrm{N}\cdot\cos(35^{\,0})\cdot 12\mathrm{m} = 49.9\ \mathrm{J}$$

2) Il blocco possiede inizialmente l'Energia potenziale gravitazionale $U_i = mgh$, che nella caduta lungo la guida liscia si trasforma in Energia cinetica; successivamente il blocco affronta la salita del piano inclinato con questa Energia, ritrasformandola in potenziale gravitazionale, ma vi è ora un attrito che si oppone al movimento e sottrae una parte di essa, per cui il blocco arriverà al massimo ad un'altezza inferiore *h'*, in cui avrà l'Energia potenziale gravitazionale $U_f = mgh'$. Per l'applicazione corretta delle trasformazioni energetiche dobbiamo tenere quindi in considerazione il lavoro fatto dalla forza di attrito di modulo $f_d = \mu_d F_N = \mu_d mg\cos\theta$, costante sul piano inclinato e opposta allo spostamento; quindi il lavoro di questa forza è negativo e vale:



$$W_a = -f_d\cdot L = -\mu_d mg\cos\theta\cdot\frac{h'}{\mathrm{sen}\,\theta}$$

dove L è la lunghezza percorsa sul piano inclinato, per cui si ha $h' = L\,\mathrm{sen}\,\theta$. Il bilancio energetico è dato dalla formula "Lavoro delle forze non conservative = variazione dell'Energia meccanica" quindi (le Energia cinetiche iniziali e finali sono zero):

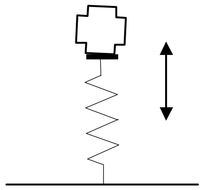
$$W_a = \Delta E = 0 + \Delta U = U_f - U_i \qquad \Rightarrow \qquad -\mu_d mg \cos\theta \cdot \frac{h'}{\operatorname{sen}\theta} = mgh' - mgh$$

da cui, semplificando mg, si ricava h’

$$h' = \frac{h}{1 + \mu_d \cos\theta / \operatorname{sen}\theta} = \frac{1.8\text{m}}{1 + 0.2 \cdot \cos(18^0)/\text{sen}(18^0)} = 1.11\text{m}$$

Notiamo che il risultato è indipendente dalla massa del blocco, come si poteva prevedere dal fatto che tutte le quantità rilevanti in questo problema sono proporzionali alla massa.

3) La molla, sottoposta alla forza peso della pietra, è inizialmente compressa di 13.2 cm rispetto alla posizione di equilibrio (in cui poniamo $x = 0$), quindi:



a) troviamo subito la costante elastica

$$F = -kx \qquad \Rightarrow \qquad k = \left|\frac{F}{x}\right| = \frac{mg}{x} = \frac{7.9\text{Kg} \cdot 9.8\text{m/s}^2}{0.132\text{m}} = 586\,\text{N/m}$$

e la frequenza di oscillazione:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{586\text{N/m}}{7.9\text{Kg}}} = 1.37\,\text{Hz}$$

b) Se la molla viene compressa di altri 25 cm, essa avrà acquistato, rispetto alla posizione di riposo in $x = 0$, l’Energia potenziale elastica corrispondente alla compressione totale $L = 0.25 + 0.132$ m = 0.382 m, quindi

$$U_m(x) = \tfrac{1}{2} k\, x^2 \qquad \Rightarrow \qquad U_m(L) = \tfrac{1}{2} k\, L^2 = 0.5 \cdot 586\text{N/m} \cdot (0.382\text{m})^2 = 42.8\,\text{J}$$

c) Se la pietra viene lasciata andare, essa viene spinta verso l’alto dalla molla, acquista velocità e può proseguire nella salita anche libera, abbandonando la molla. Le forze implicate sono tutte conservative per cui vale la conservazione dell’Energia; inizialmente l’Energia è quella potenziale elastica posseduta dalla molla, che diventa totalmente Energia meccanica (cinetica + potenziale gravitazionale) della pietra quando la molla è tornata alla sua posizione di equilibrio. Quindi possiamo scrivere:

$$E_i = E_f \qquad \Rightarrow \qquad U_m(L) = K_f + U_g(L) \qquad \Rightarrow \qquad U_m(L) = \tfrac{1}{2} m\text{v}^2 + mgL$$

da cui si ricava la velocità:

$$\text{v} = \sqrt{\frac{2U_m(L) - 2mgL}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 42{,}8\text{J} - 2 \cdot 7.9\text{Kg} \cdot 9.8\text{m/s}^2 \cdot 0.382\text{m}}{7.9\text{Kg}}} = 1.83\text{m/s}$$

d) La pietra si è ormai staccata dalla molla e sale liberamente. Nel punto di massima altezza la velocità della pietra è zero e l’Energia sarà solo quella potenziale gravitazionale, per cui:

$$E_i = E_f \qquad \Rightarrow \qquad U_m(L) = U_g(h_{\max}) \qquad \Rightarrow \qquad U_m(L) = mgh_{\max}$$

e troviamo

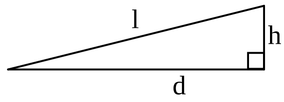
$$h_{\max} = \frac{U_m(L)}{mg} = \frac{42.8\text{J}}{7.9\text{Kg} \cdot 9.8\text{m/s}^2} = 0.55\text{m} = 55\text{cm}$$

4) L’automobile viaggia alla velocità costante di 54 Km/h = 15 m/s; ogni Δt = 1 secondo percorre quindi una lunghezza L = 15 m.

a) La potenza sviluppata dal motore deve essere uguale al lavoro nell’unità di tempo, cioè all’energia nell’unità di tempo che viene dissipata dagli attriti, per cui supponendo una forza media di attrito costante F_a ricaviamo:

$$P = \frac{W_a}{\Delta t} = \frac{F_a \cdot L}{\Delta t} \qquad \Rightarrow \qquad F_a = \frac{P \cdot \Delta t}{L} = \frac{16 \cdot 10^3\text{W} \cdot 1\text{s}}{15\text{m}} = 1067\,\text{N}$$

b) La pendenza dell' 8% significa che la macchina sale di h = 8 m per ogni tratto orizzontale d = 100 m. Dal teorema di Pitagora abbiamo: $l = \sqrt{d^2 + h^2} = 100.32\,\text{m}$, per cui in proporzione se in un secondo la macchina percorre L = 15 m, è salita di $H = h{\cdot}L/l$ = 1.196 m.



La potenza sviluppata dal motore deve essere ora uguale all'Energia dissipata negli attriti più l'Energia potenziale gravitazionale acquistata dall'automobile, nell'unità di tempo, quindi

$$P = \frac{W_a}{\Delta t} + \frac{mgH}{\Delta t} = 16\cdot 10^3\,\text{W} + 1200\text{Kg}\cdot 9.8\text{m/s}^2\cdot 1.196\text{m/1s} = 30.1\cdot 10^3\,\text{W} = 30.1\,\text{kW}$$

quasi due volte rispetto alla potenza erogata in piano!

c) Se la macchina scende in folle a velocità costante, l'Energia potenziale gravitazionale persa non si trasforma in Energia cinetica ma viene dissipata dagli attriti. Per ogni secondo la macchina deve quindi perdere i 16 kJ di Energia, calcolati al punto a) come effetto degli attriti, e questo equivale a scendere di:

$$16\,\text{kJ} = mgh \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{16\,\text{kJ}}{mg} = \frac{16\,\text{kJ}}{1200\text{Kg}\cdot 9.8\text{m/s}^2} = 1.36\,\text{m}$$

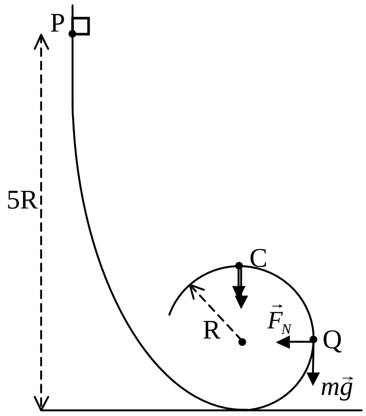
quando si percorrono 15 m di strada. Ricaviamo quindi la lunghezza in orizzontale:

$$d = \sqrt{L^2 - h^2} = 14.94\,\text{m}$$

il che ci dà una pendenza h/d = 0.091 = 9.1%.

5) Le forze che agiscono in tutto il percorso del carrello sono (1) la forza di gravità, conservativa con Energia potenziale $U(y) = mgy$; (2) la forza normale, che è sempre perpendicolare alla guida, e quindi perpendicolare allo spostamento del carrello in modo che il suo lavoro è sempre nullo. Inoltre, a seconda della posizione nella guida, un'opportuna combinazione di queste due forze fornisce la forza centripeta necessaria perché il carrello percorra le traiettorie curve.

a) Per quanto detto, possiamo applicare la legge di conservazione dell'Energia meccanica; l'Energia iniziale nel punto P è solo quella potenziale gravitazionale, mentre l'Energia nel punto Q, posto all'altezza R come si vede dal disegno, sarà la somma delle Energie cinetica e potenziale. Quindi:



$$E_i = E_f \qquad \Rightarrow \qquad U_P + 0 = K + U_Q \qquad \Rightarrow \qquad mg\cdot 5R = \tfrac{1}{2}m\text{v}_Q^{\,2} + mg\cdot R$$

da cui ricaviamo, semplificando m

$$\text{v}_Q = \sqrt{2g\cdot 4R} = \sqrt{2\cdot 9.8\text{m/s}^2\cdot 4\cdot 2.8\text{m}} = 14.8\text{m/s}$$

Dato che sul punto Q la forza di gravità è tangenziale mentre la forza normale è radiale, come si vede dal disegno, in questo punto la forza centripeta è data dalla sola forza normale, per cui possiamo calcolare:

$$F_N = F_C = m\frac{\text{v}_Q^{\,2}}{R} = 1.2\text{Kg}\frac{(14.8\text{m/s})^2}{2.8\text{m}} = 93.9\text{N}$$

b) Se il blocco perde contatto con la guida nel punto C di altezza 2R, la forza normale in questo punto si annulla, e quindi la forza centripeta necessaria a percorrere la curva è data dalla sola forza di gravità, che nel punto C è diretta verso il centro della guida circolare. Ricaviamo quindi la velocità del carrello nel punto C in queste condizioni:

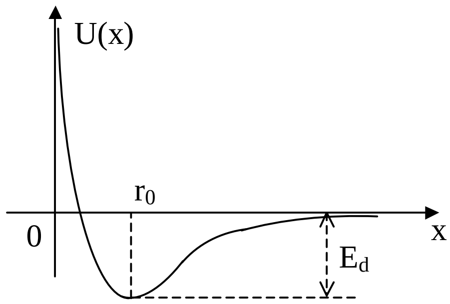
$$mg = F_C = m\frac{\text{v}_C^{\,2}}{R} \qquad \Rightarrow \qquad g = \frac{\text{v}_C^{\,2}}{R} \qquad \Rightarrow \qquad \text{v}_C = \sqrt{gR} = \sqrt{9.8\text{m/s}^2\cdot 2.8\text{m}} = 5.24\text{m/s}$$

e utilizzando ancora la conservazione dell'Energia troviamo da quale altezza h deve partire il carrello:

$$E_i = E_f \qquad \Rightarrow \qquad U_h + 0 = K_C + U_C \qquad \Rightarrow \qquad mg \cdot h = \tfrac{1}{2} m \mathrm{v}_C^{\,2} + mg \cdot 2R$$

$$h = \frac{\mathrm{v}_C^{\,2}}{2g} + 2R = \frac{(5.24\mathrm{m/s})^2}{2 \cdot 9.8\mathrm{m/s}^2} + 2 \cdot 2.8\mathrm{m} = 7.00\mathrm{m}$$

6) Nella molecola di NaCl i due atomi sono legati tra loro da un legame di tipo ionico, associato ad un'Energia potenziale rappresentata nel grafico, funzione della distanza *x* tra gli atomi. Se gli atomi sono a distanza infinita (molecola dissociata) l'Energia è zero, come si vede dal fatto che la *x* è al denominatore nell'espressione di $U(x)$; se gli atomi si avvicinano l' Energia potenziale è negativa e in diminuzione, quindi la forza tra gli atomi è attrattiva.



Però se gli atomi sono a piccolissima distanza, risulta preponderante la forza di repulsione che nasce dal fattore $1/x^9$ del potenziale: per $x \to 0$ questo fattore tende rapidamente a $+\infty$, e quindi serve un' Energia molto grande per costringere gli atomi a compenetrarsi. Il minimo dell'Energia potenziale è raggiunto alla distanza di legame r_0 = 0.25 nm, che è anche il punto di equilibrio stabile della molecola; l'Energia della molecola in r_0 vale $U(r_0) = -E_d$, dove E_d = 5.1 eV è l'Energia di dissociazione, cioè l'Energia che bisogna fornire per rompere il legame tra gli atomi.
(Ricordiamo che eV , elettronVolt, è l'unità di energia usata nel campo della Fisica Atomica e della Chimica, e vale 1 eV = $1.6 \cdot 10^{-19}$ J)
Dalla relazione tra forza ed Energia potenziale (19) vediamo che nel punto di equilibrio della molecola la forza deve essere zero ($U(x)$ ha tangente orizzontale) per cui utilizzando le regole di derivazione abbiamo:

$$0 = F(r_0) = -\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=r_0} = \left(+\frac{k}{x^2} - 9\frac{b}{x^{10}}\right)_{x=r_0} \qquad \Rightarrow \qquad 0 = +\frac{k}{r_0^{\,2}} - 9\frac{b}{r_0^{\,10}} \qquad \Rightarrow \qquad 0 = k\, r_0^{\,8} - 9b$$

da cui ricaviamo ad esempio il coefficiente b:

$$b = \frac{k\, r_0^{\,8}}{9}$$

Valutando l'Energia potenziale nel punto r_0 , e sostituendo b, abbiamo:

$$U(r_0) = -E_d \qquad \Rightarrow \qquad \frac{k}{r_0} - \frac{b}{r_0^{\,9}} = E_d \qquad \Rightarrow \qquad \frac{k}{r_0} - \frac{k}{9r_0} = E_d \qquad \Rightarrow \qquad k\frac{8}{9r_0} = E_d$$

e infine

$$k = \tfrac{9}{8} r_0\, E_d = \tfrac{9}{8} \cdot 0.25\,\mathrm{nm} \cdot 5.1\mathrm{eV} = 1.43 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{eV} \cdot \mathrm{m}$$

$$b = \frac{1}{9} \cdot 1.43 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{eV} \cdot \mathrm{m} \cdot (0.25 \cdot 10^{-9}\mathrm{m})^8 = 2.42 \cdot 10^{-87}\ \mathrm{eV} \cdot \mathrm{m}^9 = 2.42 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{eV} \cdot \mathrm{nm}^9$$

e con ciò abbiamo parametrizzato completamente la nostra funzione energia potenziale.
I numeri sembrano un poco "assurdi" ma sono un esempio delle grandi variazioni di potenze di 10 che si riscontrano quando si tratta la Fisica di oggetti estremamente piccoli, come gli atomi, o estremamente grandi, come gli oggetti astronomici.